Лекция 4
РАЗЛОЖЕНИЕ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА В БЕСКОНЕЧНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Пусть $f(z) \in A(\mathbb{C})$, ее порядок $\rho < +\infty$ и $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ — ее нули, $|z_n| \uparrow \infty$, $z_1 \neq 0$, τ — показатель сходимости нулей. Обозначим через k наименьшее целое число, удовлетворяющее условию: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{k+1}}$ сходится. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_n}\right)^{k+1}$ сходится при любом $r > 0$, $r_n = |z_n|$.

Из теоремы 3.2 следует разложение функции $f(z)$ в бесконечное произведение

$$f(z) = z^{\lambda} e^{h(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{\frac{z}{z_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k}.$$

Введем каноническое произведение $F(z)$:

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{\frac{z}{z_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k}.$$

При $k = 0$ функция $F(z) = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$.

Теорема 4.1. Порядок канонического произведения равен показателю сходимости нулей τ, при этом, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{\tau}}$ сходится, функция $F(z)$ — целая функция порядка τ конечного типа.

Доказательство. По условию $k \leq \tau \leq k + 1$. Рассмотрим Q: $\tau \leq Q \leq k + 1$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{Q}}$ сходится. Если выполняется условие $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{\tau}} < \infty$, то положим $Q = \tau$. По лемме 3.1 справедливы неравенства:

$$|E(u, k)| \leq e^{2|u|^{k+1}} \leq e^{2|u|^{Q}}, \quad |u| \leq \frac{1}{2};$$

$$\left|e^{u+\frac{u}{2}+\ldots+\frac{u^k}{k}}\right| \le e^{(2|u|)^k} \le e^{(2|u|)^Q}, \quad |u| \ge \frac{1}{2},$$

откуда

$$|E(u,k)| \le e^{(2|u|)^Q+\ln(1+|u|)} \le e^{a|u|^Q}, \quad |u| \ge \frac{1}{2}, \ \ 0 < a < \infty.$$

Поэтому $|E(u,k)| \le e^{a|u|^Q}$ для любой точки $u \in \mathbb{C}$. Тем самым

$$|F(z)| \le \exp\left(a\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z}{z_n}\right|^Q\right) = \exp(b|z|^Q),$$

отсюда порядок $\rho_F \le Q$, или $\rho_F \le \tau$. С другой стороны, по ранее доказанному $\tau \le \rho_F$.

Итак, $\rho_F = \tau$. Если выполнено условие $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|z_n|^\tau} < \infty$, то, полагая $Q = \tau$, получим, что функция $F(z)$ — каноническое произведение — имеет конечный тип. Теорема доказана. ■

Проведем оценку канонического произведения снизу.

Лемма 4.1. Вне кружков $|z - z_n| < |z_n|^{-h}$, $h > 0$ имеет место оценка

$$|F(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0, \quad |z| > r_0(\varepsilon),$$

ρ — порядок канонического произведения.

Доказательство. Имеем

$$\ln|F(z)| = \sum_{|z_n|\le 2r}\ln\left|1-\frac{z}{z_n}\right| + \sum_{|z_n|\le 2r}\ln\left|e^{\frac{z}{z_n}+\ldots+\frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k}\right| + \sum_{|z_n|>2r}\ln\left|E\left(\frac{z}{z_n},k\right)\right| \ge$$

$$\ge \sum_{r_n\le 2r}\ln\left|1-\frac{z}{z_n}\right| - \sum_{r_n\le 2r}\left|\ln\left|e^{\frac{z}{z_n}+\ldots+\frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k}\right|\right| - \sum_{r_n>2r}\left|\ln\left|E\left(\frac{z}{z_n},k\right)\right|\right|,$$

$$r_n = |z_n|, \qquad |z| = r.$$

На основании леммы 3.1 получим неравенства

$$\left|\ln\left|E\left(\frac{z}{z_n},k\right)\right|\right| \le \left(2\left|\frac{z}{z_n}\right|\right)^Q, \quad |z_n| > 2r,$$

$$\left|\ln\left|e^{\frac{z}{z_n}+\ldots+\frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k}\right|\right| \le \left(2\left|\frac{z}{z_n}\right|\right)^k \le \left(2\left|\frac{z}{z_n}\right|\right)^Q, \quad r_n \le 2r,$$

где $\tau \le Q \le k+1$, $k \le \tau \le k+1$. Тогда две последние суммы

$$\sum_{r_n \le 2r} \left| \ln \left| e^{\frac{z}{z_n}+\ldots+\frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k} \right| \right| + \sum_{r_n > 2r} \left| \ln \left| E\left(\frac{z}{z_n}, k\right) \right| \right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \left(2\left|\frac{z}{z_n}\right| \right)^Q = A|z|^Q.$$

Оценим сумму $\sum\limits_{r_n \le 2r} \ln\left|1 - \frac{z}{z_n}\right|$. Так как

$$\left|1 - \frac{z}{z_n}\right| = \left|\frac{z_n - z}{z_n}\right| \ge \frac{r_n^{-h}}{r_n} = \frac{1}{r_n^{1+h}} \ge (2r)^{-1-h},$$

то

$$\sum_{r_n \le 2r} \ln\left|1 - \frac{z}{z_n}\right| > -(1+h)\ln(2r)N,$$

где N — число точек z_n в круге $|z| \le 2r$.

Из условия $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{\rho+\varepsilon}} < \infty$ $(\varepsilon > 0)$ следует, что при больших n имеем $\frac{n}{|z_n|^{\rho+\varepsilon}} < 1$. Тем самым $N < r_N^{\rho+\varepsilon} \le (2r)^{\rho+\varepsilon}$.

При больших r сумма $\sum\limits_{r_n \le 2r} \ln\left|1 - \frac{z}{z_n}\right| > -r^{\rho+2\varepsilon}$. В итоге получаем оценку

$$\ln|F(z)| > -r^{\rho+\varepsilon}, \qquad |z| = r > r_0(\varepsilon).$$

Лемма доказана. ■

ОЦЕНКА КОЭФФИЦИЕНТОВ СТЕПЕННОГО РЯДА ЧЕРЕЗ РЕАЛЬНУЮ ЧАСТЬ СУММЫ РЯДА

Лемма 4.2. Пусть функция $f(z) \in A(|z| < R)$ и $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $|z| < R$, $\operatorname{Re} f(z) \le u$, $|z| < R$, тогда

$$|c_n| \le \frac{2(u - \operatorname{Re} c_0)}{R^n}, \quad n \ge 1.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\Phi(z) = u - f(z) = u - c_0 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n z^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, $|z| < R$. Пусть Γ — окружность $|z| = r < R$, тогда

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{\Phi(z)dz}{z^{n+1}} = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}(P+iQ)e^{-in\varphi}d\varphi, \quad \Phi(z) = P + iQ.$$

Функция $z^{n-1}\Phi(z) \in A(|z| < R)$, $n \geq 1$, тем самым

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma z^{n-1}\Phi(z)dz = \frac{r^n}{2\pi}\int_0^{2\pi}(P+iQ)e^{in\varphi}d\varphi, \quad n \geq 1.$$

Тогда

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(P-iQ)e^{-in\varphi}d\varphi.$$

Отсюда

$$b_n r^n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} Pe^{-in\varphi}d\varphi, \quad P = u - \operatorname{Re} f(z) \geq 0 \text{ в } |z| < R.$$

Поэтому $|b_n|r^n \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} Pd\varphi = 2\operatorname{Re} b_0$. При $r \to R$ получим

$$|b_n|R^n \leq 2\operatorname{Re} b_0 = 2(u - \operatorname{Re} c_0), \quad n \geq 1.$$

Окончательно

$$|b_n| = |c_n| \leq \frac{2(u - \operatorname{Re} c_0)}{R^n}. \quad \blacksquare$$

Теорема Адамара. Пусть $f(z)$ — целая функция конечного порядка ρ; $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ — ее нули, $|z_n| \uparrow \infty$, $z_1 \neq 0$, тогда функцию $f(z)$ можно представить в виде бесконечного произведения

$$f(z) = z^\lambda e^{h(z)} F(z),$$

где λ — кратность нуля $z = 0$; $F(z)$ — каноническое произведение; $h(z)$ — многочлен, степень которого не превосходит ρ.

Доказательство. Как уже было доказано (см. теорему 3.2), функция $f(z)$ представима в виде

$$f(z) = z^\lambda e^{h(z)} F(z).$$

Нужно доказать, что целая функция $h(z)$ есть многочлен, степень которого не превосходит ρ. По лемме 4.1 вне кружков $|z - z_n| < |z_n|^{-q}$, $q > \rho$ при $|z| > r_0(\varepsilon)$ имеем оценку

$$|F(z)| > \exp[-r^{\rho+\varepsilon}], \quad \varepsilon > 0.$$

Сумма диаметров кружков конечна, так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^q}$ сходится. Поэтому имеются окружности $|z| = R_n$, $R_n \to +\infty$, на которых указанная оценка выполняется. Так как $e^{h(z)} = \frac{f(z)}{z^{\lambda} F(z)}$, то

$$\left|e^{h(z)}\right| \le e^{r^{\rho+2\varepsilon}}, \quad r = R_n, \ \ n \ge n_0(\varepsilon).$$

Отсюда $\operatorname{Re} h(z) < r^{\rho+2\varepsilon}$. Пусть $h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$. По лемме 4.2 получаем оценку на коэффициенты c_k:

$$|c_k| \le \frac{2(r^{\rho+2\varepsilon} - \operatorname{Re} c_0)}{r^k}, \quad k \ge 1, \ \ r = R_n, \ \ R_n \to +\infty, \ \ n \to \infty.$$

Если $k > \rho$, то $c_k = 0$ и $h(z)$ есть многочлен степени $n \le \rho$. ■

Теорему Адамара уточнил Борель.

Теорема Бореля. Пусть $f(z)$ — целая функция конечного порядка ρ; $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ — ее нули, $|z_1| \le |z_2| \le \ldots \le |z_n| \le \ldots$, $|z_n| \uparrow \infty$, $z_1 \ne 0$, τ — показатель сходимости нулей. Тогда функцию $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z) = z^{\lambda} e^{h(z)} F(z),$$

где λ — кратность нуля $z = 0$; $h(z)$ — многочлен степени h; $F(z)$ — каноническое произведение, при этом

$$\rho = \max(h, \tau).$$

Доказательство. По теореме Адамара $h \le \rho$. По ранее доказанной теореме 2.2 имеем $\tau \le \rho$, поэтому $\max(h, \tau) \le \rho$. Остается доказать, что $\rho \le \max(h, \tau)$. Так как $f(z) = z^{\lambda} e^{h(z)} F(z)$, то

$$|f(z)| \le |z|^{\lambda} e^{\alpha r^h} e^{r^{\tau+\varepsilon}}, \quad r > r_0(\varepsilon),$$

где τ — порядок канонического произведения (см. теорему 4.1). Из этой оценки следует, что $\rho \le \max(h, \tau)$. Итак, $\rho = \max(h, \tau)$. ■

Рассмотрим пример функции $f(z) = \sin z$. Ее нули $z_n = \pm\pi n$, $n \in \mathbb{N}$, $z = 0$. Для функции $f(z)$ порядок $\rho = 1$, показатель сходимости нулей $\tau = 1$, для канонического произведения $k = 1$. В каноническом произведении имеем множители

$$\left(1 - \frac{z}{k\pi}\right) e^{\frac{z}{k\pi}} \left(1 + \frac{z}{k\pi}\right) e^{-\frac{z}{k\pi}} = 1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}.$$

Тогда $\sin z = ze^{az+b}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$. Так как $\frac{\sin z}{z} \in A(\mathbb{C})$ и $\frac{\sin z}{z} =$ $= e^{az+b}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$, то, положив $z = 0$, получим $e^b = 1$ и

$$\sin z = ze^{az}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Функция $\sin z$ есть нечетная функция, поэтому $e^{az} = e^{-az}$ для любой точки $z \in \mathbb{C}$, тем самым $a = 0$ и окончательно имеем представление

$$\sin z = z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Задачи

I. Показать, что $\cos z = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\left[(2k-1)\frac{\pi}{2}\right]^2}\right)$.

II. Получить разложение для функции $f(z) = \operatorname{ch} z - \cos z$.

III. Показать, что функция $f(z) = \operatorname{sh} z - \sin z$ имеет бесконечно много нулей и что они расположены на двух прямых, ортогональных друг другу.

IV. Доказать, что бесконечное произведение

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_k^2}\right), \quad \lambda_k > 0, \;\; \lambda_k \uparrow \infty, \;\; \lim_{k\to\infty}\frac{k}{\lambda_k} = \sigma < \infty,$$

есть целая функция конечного порядка.

V. Пусть $f(z)$ — целая и $\operatorname{Re} f(z) \le c$ — const. Доказать, что $f(z)$ есть константа.